数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 34-41

直交概念2種の Radon plane における違い

水口 洋康
千葉工業大学 新習志野教務課 学生サポートセンター
Student Affairs Department-Shinnarashino
Educational Affairs Section, Chiba Institute of Technology
hiroyasu.mizuguchi@p.chibakoudai.jp

1. Introduction

内積空間においては, $\langle x, y\rangle = 0$ で2つの元 x, y の直交が定義される. この直交の概念は非常に有用かつ興味深く, 多くの数学者によって幅広く研究, 応用されている. ノルム空間においては必ずしも内積が存在するとは限らないので, ノルムに関する等式及び不等式によって直交を拡張した概念が複数定義されている. ノルム空間 X の元 x, y に対し,

(B) x が y に Birkhoff 直交する ($x \perp_B y$ と表記) とは, 任意の実数 λ に対して $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$ が成り立つ事を言う ([3]).

(I) x が y に Isosceles 直交する ($x \perp_I y$ と表記) とは, $\|x+y\| = \|x-y\|$ が成り立つ事を言う ([6]).

数多くの拡張された直交の概念が存在し幅広く研究が行われている ([1] 等を参照).

内積空間においてはいずれも通常の直交と一致するものの, 各直交が別々の概念であり, それぞれノルムに依存する. 近年では各空間における直交の違いを計量する定数も定義, 研究されている ([8, 11, 13]):

$$D(X) = \inf\left\{\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x+\lambda y\| : x, y \in S_X, x \perp_I y\right\},$$

$$D'(X) = \sup\{\|x+y\| - \|x-y\| : x, y \in S_X, x \perp_B y\},$$

$$BR(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\| - \|x-y\|}{\|y\|} : x, y \in X, x, y \neq 0, x \perp_B y\right\},$$

$$BI(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\| - \|x-y\|}{\|x\|} : x, y \in X, x, y \neq 0, x \perp_B y\right\},$$

$$IB(X) = \inf\left\{\frac{\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|x+\lambda y\|}{\|x\|} : x, y \in X, x, y \neq 0, x \perp_I y\right\}.$$

とある直交 $\perp$ が “$x \perp y \Rightarrow y \perp x$” を満たすとき, $\perp$ は symmetric であると言われる. 内積空間における通常の直交やノルム空間における Isosceles 直交は symmetric である一方, Birkhoff 直交は必ずしも symmetric ではない.

Theorem 1 ([5, 7]). *X をノルム空間とする. このとき, $\dim X \geq 3$ ならば次は同値.*

(1) *X が内積空間.*

(2) *X において Birkhoff 直交が symmetric である*

$\dim X = 2$ の場合, Bikrhoff 直交が symmetric である事と, X が内積空間である事は同値ではない. Bikrhoff 直交が symmetric になる 2 次元ノルム空間は Radon plane と呼ばれている.

Remark 2. *2 次元ノルム空間とその共役空間の単位球面を連結することで Radon plane を形成できる ([5, 9, 10]). 従って, $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm および対応する凸関数により無数の Radon plane を考える事が出来る. 実際, 次のように Radon plane が構成される:*

$\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm 全体を AN_2,

$$\max\{t, 1-t\} \leq \psi(t) \leq 1 \quad ({}^\forall t \in [0,1])$$

を満たす $[0,1]$ 上の連続凸関数 ψ 全体を Ψ_2 と表す. AN_2 と Ψ_2 とが, 1 対 1 に対応している ([4, 14]). $\psi \in \Psi_2$ に対し dual function ψ^* が

$$\psi^*(s) = \sup\left\{\tfrac{(1-t)(1-s)+ts}{\psi(t)} : t \in [0,1]\right\} \quad ({}^\forall s \in [0,1])$$

で定義される. $\psi^* \in \Psi_2$ であり, $\|\cdot\|_{\psi^*} \in AN_2$ は $\|\cdot\|_\psi$ の dual norm である. 一方, $\psi \in \Psi_2$ に対し $\tilde{\psi} \in \Psi_2$ が $\tilde{\psi}(t) = \psi(1-t)$ $(t \in [0,1])$ で定義される. $\widetilde{(\psi^*)} = \left(\tilde{\psi}\right)^*$ なので $\tilde{\psi}^*$ と表記する. このとき, Day–James 空間 ℓ_ψ-$\ell_{\tilde{\psi}^*}$ は Radon plane となる.

Radon plane において $IB(X)$, $BR(X)$, $BI(X)$ の値を考える. なお, 一般の空間では $1/2 \leq BI(X) \leq 1$, $0 \leq BR(X) \leq 1$, $0 \leq BI(X) \leq 2$ である.

2. $IB(X)$ in Radon plane

Birkhoff 直交と Isosceles 直交の差異について, James [6] による次の結果が重要である.

Proposition 3 ([6]). ノルム空間 X において

(i) $0 \neq x \in X$, $y \in X$ に対し $x \perp_I y$ であるとする．このとき, 任意の実数 k に対し $\|x+ky\| > \frac{1}{2}\|x\|$.

(ii) $0 \neq x \in X$, $y \in X$ に対し $x \perp_I y$, $\|y\| \leq \|x\|$ とする．このとき, 任意の実数 k に対し $\|x+ky\| \geq 2(\sqrt{2}-1)\|x\|$.

(i) より一般のノルム空間で不等式 $1/2 \leq IB(X) \leq 1$ が成立する．

2 つの元 $x, y \in S_X$ に対し, sine function $s(x,y)$ が以下のように定義される ([15]):

$$s(x,y) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|x+ty\|.$$

V. Balestro, H. Martini, and R. Teixeira [2] が次を示している．

Proposition 4 ([2]). 2 次元ノルム空間 X が *Radon plane* である事は, X において *sine function* が *symmetric* である事と同値である．

ここで, sine function が symmetric とは, 任意の $x, y \in S_X$ に対し $s(x,y) = s(y,x)$ が成り立つ事を言う．Proposition 3 (ii), 4 より, Radon plane X において

$$2(\sqrt{2}-1) \leq IB(X) \leq 1.$$

sine function が symmetric である事を再度用いて

Proposition 5 ([12]). *Radon plane* X において,

$$IB(X) = \inf \left\{ \|x+ky\| : \begin{array}{l} x, y \in S_X,\ \alpha \in [0,1],\ x \perp_I \alpha y, \\ k \in [0, \min\{1/2, \alpha\}],\ l \in [0, 1/2], \\ \|x+ky\| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x+\lambda y\| = \min_{\mu \in \mathbb{R}} \|y+\mu x\| = \|y+lx\| \end{array} \right\}.$$

Proof. $x, y \in S_X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $x \perp_I \alpha y$ であるとする．$x \perp_I \alpha y$ が $x \perp_I -\alpha y$ および $y \perp_I x/\alpha$ を意味するので $\alpha \in [0,1]$ としてよい．X が Radon plane であるので $\|x+ky\| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x+\lambda y\| = \min_{\mu \in \mathbb{R}} \|y+\mu x\| = \|y+lx\|$ を満たす実数 k, l が存在し, 更に k と l の符号が一致する．よって $0 \leq k$ and $0 \leq l$ とできる．$x \perp_I \alpha y$ および $\|x+ky\| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x+\lambda y\|$ より $k \leq \alpha$ である．

$\|x+ky\| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x+\lambda y\|$ から $x+ky \perp_B y$. Radon plane においては Birkhoff 直交が symmetric なので $y \perp_B x+ky$. これより

$$\alpha + k \leq \|x+ky-(\alpha+k)y\| = \|x-\alpha y\|$$

が成立する．三角不等式および $x \perp_I \alpha y$ と組み合わせると

$$\begin{aligned} \alpha + k \leq \|x+ky-(\alpha+k)y\| = \|x-\alpha y\| &= \|x+\alpha y\| \\ &= \|x+ky+(\alpha-k)y\| \\ &\leq \|x+ky\| + \alpha - k \end{aligned}$$

よって, $2k \leq \|x+ky\| = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x+\lambda y\| \leq 1$ で $k \in [0,1/2]$.
　同様に $2l \leq \|y+lx\| \leq 1$ も得られるので, $l \in [0,1/2]$. □

Proposition 6 ([12]). *Radon plane X において, $x, y \in S_X$, $\alpha \in [0,1]$ に対し $x \perp_I \alpha y$ であるとする.*

$$\|x+ky\| = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x+\lambda y\| = \min_{\mu\in\mathbb{R}} \|y+\mu x\| = \|y+lx\|$$

を満たす $k \in [0, \min\{1/2, \alpha\}]$, $l \in [0,1/2]$ をとる. このとき,

$$\|x+ky\| \\ \geq \max\left\{\frac{(\alpha+k)(1-kl)}{(\alpha+k)(1-kl)+k(1-l)(\alpha-k)}, \frac{(1+\alpha l)(1-kl)}{(1+\alpha l)(1-kl)+l(1-k)(1-\alpha l)}\right\}.$$

$$F(\alpha,k,l) = \frac{k(1-l)(\alpha-k)}{(\alpha+k)(1-kl)}, \quad G(\alpha,k,l) = \frac{l(1-k)(1-\alpha l)}{(1+\alpha l)(1-kl)}$$

とおくと先の proposition より

$$(\|x+ky\|)^{-1} \leq 1 + \min\{F(\alpha,k,l), G(\alpha,k,l)\}$$

　$\alpha \in [0,1]$, $k \in [0, \min\{1/2,\alpha\}]$, $l \in [0,1/2]$ の範囲で $\min\{F(\alpha,k,l), G(\alpha,k,l)\}$ は最大値 $1/8$ を取り,

Theorem 7 ([12]). *X を Radon plane とする. このとき, $8/9 \leq IB(X) \leq 1$.*

　Radon plane 全体の中で $IB(X) = 8/9$ を特徴付ける事が出来る. 2 次元ノルム空間の単位球面が affine regular hexagon であるとは, 六角形になっている単位球面の頂点を $\pm u$, $\pm v$, $\pm(u+v)$ として表現できるような $u, v \in S_X$ が存在する事を言う.

Theorem 8 ([12]). *X を Radon plane とする. このとき以下は同値*

(1) $IB(X) = 8/9$

(2) その単位球面が *affine regular hexagon.*

Proof. X を Radon plane とし $IB(X) = 8/9$ が成り立つとすると, $x \perp_I \alpha y$ かつ

$$\|x+ky\| = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|x+\lambda y\| = \frac{8}{9} = \min_{\mu\in\mathbb{R}} \|y+\mu x\| = \|y+lx\|$$

を満たす $x, y \in S_X$, $\alpha \in [0,1]$, $k, l \in [0,1/2]$ が存在する. $\min\{F(\alpha,k,l), G(\alpha,k,l)\}$ は $\alpha = 1$, $k = l = 1/3$ のときに最大値 $1/8$ を取るので, このとき実際 $\alpha = 1$,

$k = l = 1/3$ である．三角不等式 $\alpha + k \le \alpha\|x + ky\| + k\|x - \alpha y\|$ が $\alpha = 1$, $k = l = 1/3$ に対し等式となり，

$$1 + \frac{1}{3} = \|x + ky\| + \frac{1}{3}\|x - y\| = \frac{8}{9} + \frac{1}{3}\|x - y\|$$

で $\|x - y\| = 4/3$. $x \perp_I y$ なので $\|x + y\|$ も $4/3$ である．

$0 \neq z \in X$ に対し $\hat{z} = z/\|z\|$ と表記すると，

$$\widehat{x+y} = \frac{3}{4}(x + y) = \frac{1}{2}\left(\widehat{x + \frac{1}{3}y} + \widehat{y + \frac{1}{3}x}\right)$$

であり，

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\widehat{x + \frac{1}{3}y} + \widehat{y + \frac{1}{3}x}\right)\right\| = \|\widehat{x+y}\| = 1.$$

一方，

$$x = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{3}y) + \frac{1}{4}(x - y),$$

に対し，$\|x + \frac{1}{3}y\| = 8/9$, $\|x - y\| = 4/3$ より

$$\left\|\frac{2}{3}(\widehat{x + \frac{1}{3}y}) + \frac{1}{3}(\widehat{x - y})\right\| = \|x\| = 1.$$

同様に

$$\left\|\frac{2}{3}(\widehat{y + \frac{1}{3}x}) + \frac{1}{3}(\widehat{-x + y})\right\| = \|y\| = 1.$$

以上より，3 つの線分

$$\left[\widehat{x-y}, \widehat{x + \frac{1}{3}y}\right], \quad \left[\widehat{x + \frac{1}{3}y}, \widehat{y + \frac{1}{3}x}\right], \quad \left[\widehat{y + \frac{1}{3}x}, \widehat{-x+y}\right]$$

が単位球面 S_X に含まれる．更に，

$$(\widehat{x-y}) + (\widehat{y + \frac{1}{3}x}) = \frac{3}{4}(x - y) + \frac{9}{8}(y + \frac{1}{3}x) = \frac{9}{8}(x + \frac{1}{3}y)$$

$$= \widehat{x + \frac{1}{3}y}$$

が成立するので，単位球面 S_X は affine regular hexagon.

逆に単位球面 S_X が affine regular hexagon だとすると $\pm u$, $\pm v$, $\pm(u + v)$ が S_X の頂点となる $u, v \in S_X$ が存在する．$x = u + \frac{1}{3}v$, $y = -\frac{1}{3}u - v$ とすると，$\|x + y\| = \|x - y\| = 4/3$ で $x \perp_I y$. 更に，

$$x + \frac{1}{3}y = u + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}(-\frac{1}{3}u - v) = \frac{8}{9}u$$

が成り立つので $IB(X) = 8/9$ となる． □

3. $BI(X)$ and $BR(X)$ in Radon plane

$$BI(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\| - \|x-y\|}{\|x\|} : x, y \in X, x, y \neq 0, x \perp_B y\right\}$$

$$= \sup_{\alpha>0}\{\|x+\alpha y\| - \|x-\alpha y\| : x, y \in S_X, x \perp_B y\},$$

$$BR(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\| - \|x-y\|}{\|y\|} : x, y \in X, x, y \neq 0, x \perp_B y\right\}$$

$$= \sup_{\alpha>0}\{\|\alpha x+y\| - \|\alpha x-y\| : x, y \in S_X, x \perp_B y\}$$

と, それぞれ書き換えられるので, X が Radon plane であるときは $BI(X) = BR(X)$ である.

Papini と Wu は次を示している:

Theorem 9 ([13]). X をノルム空間とする. このとき,

[1] $0 \leq BR(X) \leq 1$.

[2] $BR(X) = 0$ は, X が内積空間である事と同値.

[3] $BR(X)$ の上限値 1 が具体的な元により与えられる事と, 線分 $[x, y], [x, x-\alpha y]$ が単位球面に含まれるような $x, y \in S_X$ 及び $\alpha \in (0, 2]$ が存在する事が同値, このとき, $[x, y]$ の長さは 1 以上.

Theorem 9 より以下を得る事が出来る.

Theorem 10. X を *Radon plane* とする. このとき以下は同値

(1) $BI(X) = BR(X) = 1$

(2) その単位球面が *affine regular hexagon.*

Proof. X を Radon plane とし $BI(X) = BR(X) = 1$ が成り立つとすると, Theorem 9 より $[x, y], [x, x-\alpha y] \subset S_X$ となる $x, y \in S_X$, $\alpha \in (0, 2]$ が存在する. このとき $x \perp_B y$ である. X が Radon plane なので, $y \perp_B x$ でもあり

$$1 = \|x - \alpha y\| \geq \|\alpha y\| = \alpha.$$

よって, $\|x - y\| \geq \|x - \alpha y\| = 1$ である. $[x, y] \subset S_X$ より $y \perp_B (x - y)$. X が Radon plane なので, $(x - y) \perp_B y$ も言え,

$$\|x - y\| \leq \|x - y + (1-\alpha)y\| = \|x - \alpha y\| = 1,$$

よって $\|x-y\|=1$. $x\perp_B y$ なので $[x,x-y]\subset S_X$. $-y\perp_B x$ でもあり $[x-y,-y]\subset S_X$. $[x,y]\subset S_X$ と合わせ, S_X は affine regular hexagon である.

逆に単位球面 S_X が affine regular hexagon だとすると $\pm u$, $\pm v$, $\pm(u+v)$ が S_X の頂点となる $u,v\in S_X$ が存在する. $x=u+v$, $y=u$ とすれば

$$x\perp_B y,\quad \|x+y\|=2\quad,\|x-y\|=1.$$

従って

$$\begin{aligned}1&=\|x+y\|-\|x-y\|\\&\le \sup_{\alpha>0}\{\|\alpha x+y\|-\|\alpha x-y\| : x,y\in S_X, x\perp_B y\}\\&=BR(X)\le 1,\end{aligned}$$

$BI(X)=BR(X)=1$. □

参考文献

[1] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces, Aequationes Math., 83 (2012) 153–189.

[2] V. Balestro, H. Martini, and R. Teixeira, Geometric properties of a sine function extendable to arbitrary normed planes, Monatsh. Math., 182 (2017), 781–800.

[3] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J., 1 (1935) 169–172.

[4] F. F. Bonsall and J. Duncan, Numerical Ranges II., London Math. Soc. Lecture Note Series, 10, 1973.

[5] M. M. Day, Some characterization of inner-product spaces, Trans. Am. Math. Soc., 62 (1947), 320–337.

[6] R. C. James, Orthogonality in normed linear spaces, Duke Math. J., 12 (1945), 291–302.

[7] R. C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Am. Math. Soc., 61 (1947), 265–292.

[8] D. Ji and S. Wu, Quantitative characterization of the difference between Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality, J. Math. Anal. Appl., 323 (2006), 1–7.

[9] H. Martini and K. J. Swanepoel, The geometry of Minkowski spaces—a survey. II. , Expo. Math., 22 (2004), 93–144.

[10] H. Martini and K. J. Swanepoel, Antinorms and Radon curves, Aequat Math., 72 (2006), 110–138.

[11] H. Mizuguchi, The constants to measure the differences between Birkhoff and isosceles orthogonalities, Filomat, 20 (2016), 2761–2770.

[12] H. Mizuguchi, The differences between Birkhoff and isosceles orthogonalities in Radon planes, Extracta Math., 32 (2017), 173–208.

[13] P. L. Papini and S. Wu, Measurements of differences between orthogonality types, J. Math. Aanl. Appl., 397 (2013) 285–291.

[14] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Von Neumann–Jordan constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., 244 (2000), 515–532.

[15] T. Szostok, On a generalization of the sine function, Glas. Mat. Ser. III 38 (2003), 29–44.